digkeiten und γ, γ_1 die entsprechenden spezifischen Gewichte darstellen. Sind zwei Querschnitte unendlich benachbart, so ist

$$f + df = f_1 \qquad c + dc = c_1 \qquad \gamma + d\gamma = \gamma_1$$

also
$$f\,c\,\gamma = (f + df)\,(c + dc)\,(\gamma + d\gamma)$$

Ausmultipliziert nach Herausstreichen der Differentiale 2. Ordnung
$$f\,\gamma\,dc + \gamma\,c\,df + f\,c\,d\gamma = 0$$

oder
$$\frac{df}{f} = -\frac{dc}{c} - \frac{d\gamma}{\gamma} \tag{17}$$

Für die Adiabate ist $c_v\,dT = -Ap\,dv$, also mit $pdv + v\,dp = RdT$

$$v\,dp = -R\,\frac{A\,p\,dv}{c_v} - p\,dv\,.$$

Wegen $AR = c_v\,(\varkappa-1)$ wird demnach

$$-v\,dp = p\,dv + (\varkappa - 1)\,p\,dv\,.$$

Also ist für die adiabatische Zustandsänderung allgemein

$$\frac{dp}{dv} = -\varkappa\,\frac{p}{v}\,.$$

Setzt man hierin

$$v = \frac{1}{\gamma}\,, \quad \text{also} \quad dv = -\frac{d\gamma}{\gamma^2}\,,$$

so wird auch

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dp}{\varkappa\,p}\,. \tag{18}$$

Da nun $\int v\,dp = -\dfrac{c^2}{2g}$, ist $v\,dp = -\dfrac{c\,dc}{g}$ und

$$-\frac{dc}{c} = \frac{v\,dp}{c^2}\,g\,. \tag{19}$$

Mit Gl. (18) und (19) läßt sich Gl. (17) nunmehr schreiben

$$\frac{df}{f} = \left(\frac{g\,v}{c^2} - \frac{1}{\varkappa\,p}\right)dp\,. \tag{20}$$

Dieser Ausdruck ist von allgemeiner Gültigkeit für die Berechnung der Querschnittsverhältnisse bei adiabatischer Strömung. Beim Raketenofen ist nun im ganzen Düsenbereich abnehmender Druck, dp somit unter allen Umständen negativ. Die Frage, ob das Element $\frac{df}{f}$ der Querschnittsveränderung positiv oder negativ ist, ob die Düse also konvergent oder divergent verlaufen muß, hängt also ausschließlich von dem Glied in der Klammer ab.

Hier sind nun drei Fälle möglich:

1. $\frac{g\,v}{c^2} > \frac{1}{\varkappa\,p}$. Dann ist die Klammer positiv, $\frac{df}{f}$ negativ; die Düse muß also in dem Strömgeschwindigkeitsbereich $c > \sqrt{g\,\varkappa\,p\,v}$ k o n v e r g e n t verlaufen.

2. $\frac{g\,v}{c^2} < \frac{1}{\varkappa\,p}$. Hier wird $\frac{df}{f}$ positiv, die Strömgeschwindigkeit in dem Bereich $c > \sqrt{g\,\varkappa\,p\,v}$ erfordert also einen d i v e r g e n t e n Düsenverlauf.

3. $\frac{g\,v}{c^2} = \frac{1}{\varkappa\,p}$. Für diesen zwischen 1. und 2. liegenden Fall wird $\frac{df}{f} = 0$. Das bedeutet: Wird die Strömgeschwindigkeit $c = \sqrt{g\,\varkappa\,p\,v}$ erreicht, so muß gerade dort der Übergang vom konvergenten in den divergenten Düsenteil, d. h. die engste Stelle der Düse, liegen.

Man kann nun auch umgekehrt folgern: Da dp, wie sich übrigens auch durch einfache Messung nachweisen läßt, während des Expansionsverlaufes niemals Null werden kann, muß bei jeder Ausstömung von Gasen im engsten Querschnitt („Düsenhals") die Geschwindigkeit sich auf den Wert

$$c_m = \sqrt{g\,\varkappa\,p_m\,v_m} \tag{21 a}$$

einstellen, sofern nur die Expansion ohne Zu- und Abführung von Wärme, also adiabatisch, verläuft. Diese Geschwindigkeit stellt die Schallgeschwindigkeit des betreffenden Gases bei dem Halsdruck p_m und dem zugehörigen spez. Volumen v_m dar. Wegen der Zustandsgleichung kann man natürlich auch schreiben:

$$c_m = \sqrt{g\,\varkappa\,R\,T_m}\,. \tag{21 b}$$

c_m ist also vom Ofendruck unabhängig.

Es ist nun noch von Interesse, auch den Druck p_m im Düsenhals zu kennen. Setzt man in unserer Gl. (12 a) anstelle des Mündungsdruckes p_a den Halsdruck p_m ein, so erhält man die Geschwindigkeit, die sich bei adiabatischer Expansion von p_i auf p_m entwickeln kann. Dieser Ausdruck muß natürlich mit Gl. (21) identisch sein. Durch Gleichsetzen wird

$$g\,\varkappa\,p_m\,v_m = 2\,g\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,p_i\,v_i\left[1 - \left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right].$$

Wegen $\quad p_i\,v_i^{\varkappa} = p_m\,v_m^{\varkappa} \quad$ ist auch

$$p_i\,v_i\left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{2}{\varkappa - 1}\,p_i\,v_i\left[1 - \left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$$

und

$$\left(\frac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\left(1 + \frac{2}{\varkappa - 1}\right) = \frac{2}{\varkappa - 1}\,;$$

endlich

$$\frac{p_m}{p_i} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{22}$$

Dieses sog. „kritische Druckverhältnis" ist also ausschließlich abhängig von $\varkappa$. Da p_i und p_m leicht meßbar sind, ist hier somit eine vorzügliche Möglichkeit gegeben, einen Einblick in den Verlauf von $\varkappa$ v o r Eintritt in die Lavaldüse zu tun. Auf die Möglichkeit, hierdurch Rückschlüsse auf den wahren Verbrennungsverlauf im Ofen zu ziehen, soll in einem der nächsten Abschnitte zurückgegriffen werden.

Wegen $\dfrac{T_m}{T_i} = \left(\dfrac{p_m}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ wird die Temperatur im Düsenhals

$$T_m = \frac{2}{\varkappa + 1}\,T_i\,. \tag{23}$$

Setzt man z. B. $\varkappa = 1{,}2$, so wird

$$p_m = 0{,}564\,p_i$$

und

$$T_m = 0{,}91\,T_i\,.$$

Jetzt ist noch eine Beziehung erforderlich, die es ermöglicht, das Querschnittsverhältnis der Lavaldüse zwischen Düsenhals und Mündung für ein gewünschtes Druckgefälle zu errechnen.

Mit der Kontinuitätsgleichung (16)

$$f_m\,c_m\,\gamma_m = f_a\,c_a\,\gamma_a$$

wird

$$\frac{f_m}{f_a} = \frac{c_a}{c_m}\,\frac{\gamma_a}{\gamma_m} = \frac{c_a}{c_m}\,\frac{v_m}{v_a}\,.$$

Durch Einsetzen von Gl. (12 a) und (21 a) wird weiter

$$\frac{f_m}{f_a} = \frac{v_m}{v_a}\sqrt{\frac{2g\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,p_i\,v_i\left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}{g\,\varkappa\,p_m\,v_m}}\,.$$

Mit Gl. (22) auch

$$\frac{f_m}{f_a} = \frac{v_m}{v_a}\sqrt{\frac{\frac{2}{\varkappa - 1}\,v_i\left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}{v_m\left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}}\,.$$

Setzt man hierin $\dfrac{v_i}{v_a} = \left(\dfrac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$, so wird nach einigen Umformungen

$$\frac{f_m}{f_a} = \left(\frac{\varkappa + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\sqrt{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}\,. \tag{24}$$

Mit dieser Gleichung läßt sich für jedes Druckgefälle des Querschnittsverhältnis der Lavaldüse errechnen. Die Einfachheit der Ermittlung halber ist in Tafel 5 diese Funktion für einige Werte von $\varkappa$ (bzw. n, vgl. später) aufgetragen.