sehr zweckmäßig sein. Für das Problem der Flüssigkeitsrakete wäre es daher von großem praktischen Wert, wenn für diese Reihen solche mit besseren Konvergenzverhältnissen oder gar geschlossene Integrale gefunden würden.
Für längere Brennzeiten bleibt somit vorerst nur die Methode der stückweisen Integration. Diese läßt sich auch für Schrägstarts durchführen und zwar mit genügender Genauigkeit. Freilich ist das Verfahren äußerst umständlich.
In den Höhen- und Breitenkoordinaten einer schräg durch die Atmosphäre fliegenden Rakete gelten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} m\,y'' &= m\,\frac{d^2y}{dt^2} = (P - W)\sin\vartheta - G\,, \\ m\,x'' &= m\,\frac{d^2x}{dt^2} = (P - W)\cos\vartheta\,. \end{aligned} \tag{83}$$

Bei der stückweisen Integration zerlegt man nun die Flugbahn in gleiche Zeitabschnitte $\Delta\, t$, zweckmäßig z. B. von je einer Sekunde. Es wird dann der Geschwindigkeitszuwachs während der Zeit $\Delta\, t = 1$ sec

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{(P - W)\cos\vartheta}{m}\,\Delta t\,, \\ \Delta v_y &= \frac{(P - W)\sin\vartheta - G}{m}\,\Delta t\,. \end{aligned} \tag{84}$$

In der ersten Sekunde wird dabei in beiden Richtungen ein Weg

$$\Delta s_{x_1} = \frac{\Delta v_{x_1}}{2} \qquad \Delta s_{y_1} = \frac{\Delta v_{y_1}}{2}$$

zurückgelegt.
Betrachtet man nun die zweite Sekunde, so ergibt sich der Geschwindigkeitszuwachs wieder aus den Gl. (84). Dabei haben sich W, ϑ, G und m inzwischen aber verändert. W ist durch $\Delta\, v_x$ und v_y aus der vorigen Sekunde zu errechnen; ϑ durch das Kräfteparallelogramm; G und m aus dem Treibstoffverbrauch. Die am Schluß der zweiten Sekunde zurückgelegten Wege sind dann

$$\begin{aligned} s_{x_2} &= \Delta s_{x_1} + v_{x_1} + \frac{\Delta v_{x_2}}{2}\,, \\ s_{y_2} &= \Delta s_{y_1} + v_{y_1} + \frac{\Delta v_{y_2}}{2} \qquad \text{usf.} \end{aligned}$$

Auf diese Weise läßt sich die Flugbahn unter Antrieb Punkt für Punkt bestimmen. Es läßt sich dabei die Abnahme der Luftdichte, der Schallgeschwindigkeitsübergang usw. mit beliebiger Genauigkeit berücksichtigen.
Für den senkrechten Aufstieg des Aggregats II errechnet sich auf diese Weise für die Geschwindigkeit bei Brennschluß

$$v_e = 450 \text{ m/sec}\,.$$

Die Rakete hat dann eine Höhe

$$h_e = 3700 \text{ m}\,.$$

In dem Augenblick, da die Rakete zu brennen aufhört, beginnt der zweite, antriebslose Teil der senkrechten Aufstiegbahn.
Die Verzögerung der Rakete ist hier gegeben durch die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{W}{m} - g\,.$$

Setzt man $\frac{W}{m} = \frac{a}{m}\,v^2 = c\,v^2$, so wird

$$y'' = \frac{dv}{dt} = -\,c\,v^2 - g\,, \tag{85}$$

Da m jetzt konstant ist und auch kein Schub vorhanden ist, gelingt die Integration dieser Gleichung auf einfache Weise. Aus Gl. (85) folgt sofort

$$-\,dt = \frac{dv}{g + c\,v^2}\,;$$

die freie Flugzeit von der Brennschlußgeschwindigkeit v_e bis zum Gipfelpunkt ist somit

$$t_F = \int \frac{dv}{g + c\,v^2}\,.$$

Integriert man diesen Ausdruck, so bekommt man als Beziehung zwischen v und t

$$v = \frac{v_e\sqrt{\frac{c}{g}}\cos\left(t\sqrt{g\,c}\right) - \sin\left(t\sqrt{g\,c}\right)}{v_e\frac{c}{g}\sin\left(t\sqrt{g\,c}\right) + \sqrt{\frac{c}{g}}\cos\left(t\sqrt{g\,c}\right)}\,.$$

Setzt man $v = dy/dt$, so ergibt die nochmalige Integration als Funktion zwischen Höhe und Zeit

$$y = \frac{1}{c}\ln\left(\cos\left[t\sqrt{g\,c}\right] + v_e\sqrt{\frac{c}{g}}\sin\left[t\sqrt{g\,c}\right]\right).$$

Im Gipfelpunkt ist nun $t = t_F$, $v = 0$. Für die Steighöhe nach Brennschluß ergibt sich also

$$y_F = \frac{1}{2\,c}\ln\left(1 + v_e^2\,\frac{c}{g}\right). \tag{86}$$

Ebenso wird die Steigzeit vom Brennschlußpunkt bis zum Gipfel

$$t_F = \frac{1}{\sqrt{g\,c}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(v_e\sqrt{\frac{c}{g}}\right). \tag{87}$$

BEISPIEL:

In dem vorigen Beispiel ergab sich für die Brennschlußgeschwindigkeit des Aggregats II $v_e = 450$ m/sec, die Brennschlußhöhe betrug dabei 3700 m. Welche Gipfelhöhe erreicht das Aggregat in dem anschließenden freien senkrechten Flug?
Für das Aggregat II ergab sich als aerodynamische Konstante $a = 0{,}0026$ kgsec²/m²; da der Freiflug aber erst in 3700 m Höhe beginnt, ist die Luftdichte jetzt erheblich geringer; für 4500 m ist z. B. $\gamma_0 = 0{,}60$, also a $4500 = 0{,}60 \cdot 0{,}0026 = 0{,}00156$ kgsec²/m². Bei einem Gewicht der Rakete G = 50 kg wird die Leermasse m = 5,1 kgsec²/m. Es wird also

$$c = \frac{a}{m} = \frac{0{,}00156}{5{,}1} = 0{,}000306\ (m^{-1})\,.$$

Für die freie Steighöhe nach Brennschluß ergibt sich somit

$$y_F = \frac{1}{2 \cdot 0{,}000306}\ln\left(1 + 450^2\,\frac{0{,}000306}{9{,}81}\right) = 3150 \text{ m}\,.$$

Die freie Steigzeit vom Brennschluß- bis zum Gipfelpunkt beträgt dabei

$$t_F = \frac{1}{\sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}000306}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(450\sqrt{\frac{0{,}000306}{9{,}81}}\right) = 21{,}8 \text{ sec}\,.$$

Fügt man zu diesen Werten diejenigen hinzu, die die Rakete bei Brennschluß schon erreicht hat, so erhält man als gesamte Steigzeit des Aggregats II

$$t_s = 16 + 21{,}8 \simeq 38 \text{ sec}\,.$$

Das Aggregat erreicht in dieser Zeit eine Höhe von

$$h_s = 3700 + 3250 \simeq 7000 \text{ m}\,.$$

Diese Zahlen gelten nur für die hier gemachten Voraussetzungen hinsichtlich des Luftwiderstands-Beiwerts c_w, der mit 0,5 angenommen wurde. Bei Abschluß dieser Dissertation war im Strömungsforschungs-Institut der Technischen Hochschule Berlin eine Untersuchung im Gange, die über den Luftwiderstand des Aggregats II genauen Aufschluß geben soll. Insbesondere soll dabei über den Einfluß Klarheit geschaffen werden, den der Gasstrahl der Rakete auf die Luftwiderstandsverhältnisse ausübt.